TITLE:
ρ-Dilationについて(作用素不等式とその周辺)

AUTHOR(S):
岡安, 隆照

CITATION:
岡安, 隆照. ρ-Dilationについて(作用素不等式とその周辺). 数理解析研究所講究録 1995, 903: 142-147

ISSUE DATE:
1995-03

URL:
http://hdl.handle.net/2433/59395

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
903巻 1995年 142-147

DILATN19.TEX ; 1995/02/03

ρ-Dilation について

岡 安 隆 照

山形大学理学部

1. Tをヒルベルト空間 H上の有界線形作用素 (以後単に作用素という), Uを Hを含むヒルベルト空間 K上のユニタリ作用素とする. このときもしも

$$T^m = \rho PU^m|H \ (n=1,2,\cdots)$$

が成り立つならば, Uは Tのユニタリρ-dilation であるという. ただし, ρは正の実数, Pは Kから Hの上への直交射影, $S|H$は作用素 Sの Hへの制限である [10].

特に

$$K = \bigvee_{m=-\infty}^{\infty} U^m H$$

が成り立つとき Tのユニタリρ-dilation$U$は極小であるという. 極小ユニタリρ-dilation はユニタリ同値を除いて一意に決まる.

言うまでもなくユニタリ 1-dilation は通例のユニタリ dilation である.

ユニタリρ-dilation をもつ作用素のクラスを$\mathcal{C}_\rho$と書く.

作用素 Tがユニタリρ-dilation をもつための条件は, Tのスペクトル $\sigma(T)$ が閉単位円 $\mathbf{D}=\{z:|z|\leq 1\}$ の中にあって, $\mathbf{D}$ の内部 $\mathbf{D}^i$の任意のzに対して

$$\mathrm{Re}((I-\bar{z}T)^{-1}) \geq \left(1-\frac{\rho}{2}\right) I$$

が成り立つことである; また, 任意の $z\in\mathbf{D}^i$に対して

$$\left(1-\frac{\rho}{2}\right)|z|^2|T|^2 + (\rho-1)\mathrm{Re}(\bar{z}T) \leq I$$

が成り立つことである [11, p.45].

ユニタリ dilation の概念の重要性は改めて指摘する迄もない．それは文字通り作用素論の基本のひとつである．しかしユニタリ ρ-dilation については“評価”は未だ確定していないといってよいであろう．しかしその議論そのものはおもしろい．

ここではそのユニタリ ρ-dilation について考察する．

2. $T_1, T_2, \cdots, T_n$をヒルベルト空間 H上の互いに可換な作用素の族とし, $U_1, U_2, \cdots, U_n$を, Hを含むヒルベルト空間 K上の互いに可換なユニタリ作用素の族とする．このときもしも

$$T_1^{m_1} T_2^{m_2} \cdots T_n^{m_n} = \rho P U_1^{m_1} U_2^{m_2} \cdots U_n^{m_n} | H \ (m_1, m_2, \cdots, m_n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つならば, ユニタリ作用素の族 U_1, U_2, $\cdots$, U_nは作用素の族 T_1, T_2, $\cdots$,T_nの同時ユニタリ ρ-dilation であるという (ことにする).

特に

$$K = \bigvee_{m_1, m_2, \cdots, m_n = -\infty}^{\infty} U_1^{m_1} U_2^{m_2} \cdots U_n^{m_n} | H$$

が成り立つとき作用素の族 $T_1, T_2, \cdots, T_n$のユニタリ ρ-dilationU_1, U_2, $\cdots$, U_nは極小であるという．極小ユニタリ ρ-dilation はユニタリ同値を除いて一意に決まる．

同時ユニタリ 1-dilation が同時ユニタリ dilation であることは勿論である．

作用素の族が同時ユニタリ dilation をもつことと, それが“行列タイプの”多変数の von Neumann の不等式を満たすことは同値である．すなわち, 作用素の族 $T_1, T_2, \cdots, T_n$が同時ユニタリ dilation をもつための必要十分条件はトーラス $\mathbf{T}$ の直積 $\mathbf{T}^n$上の複素係数の (n 変数) 多項式の全体 $P(\mathbf{T}^n)$ から $B(H)$ への写像

$$\phi : p = p(z_1, z, \cdots, z_n) \longrightarrow p(T_1, T_2, \cdots, T_n)$$

が完全縮小写像であることである．換言すると, $P(\mathbf{T}^n)$ の要素を要素とする任意の $m \times m$ 行列 (p_{ij}) に対して

$$||(p_{ij}(T_1, T_2, \cdots, T_n))|| \leq ||(p_{ij})|| = \sup_{z_1, z_2, \cdots, z_n \in \mathbf{T}} ||(p_{ij}(z_1, z, \cdots, z_n))||$$

が成り立つことである [6], [7], [8].

しかしながらこの主張は, ユニタリρ-dilation についても, von Neumann の不等式をうまく変形すればそのまま成り立つことがわかる.

定理 1. ヒルベルト空間 H上の互いに可換な作用素の族$T_1, T_2, \cdots, T_n$が同時ユニタリρ-dilation をもつための必要十分条件はトーラス $\mathbf{T}$ の直積 $\mathbf{T}^n$上の複素係数の (n 変数) 多項式の全体 $P(\mathbf{T}^n)$ から $B(H)$ への写像

$$p = p(z_1, z_2, \cdots, z_n) \longrightarrow p(T_1, T_2, \cdots, T_n) + (\rho - 1)p(0, 0, \cdots, 0)I$$

をϕとおくとき$\rho^{-1}\phi$が完全縮小写像であることである. 換言すれば, $P(\mathbf{T}^n)$の要素を要素とする任意の $m \times m$ 行列 (p_{ij})(m も任意) に対して

$$||(p_{ij}(T_1, T_2, \cdots, T_n) + (\rho - 1)p_{ij}(0, 0, \cdots, 0)I)|| \leq \rho||(p_{ij})||$$

が成り立つことである.

このことは同時ユニタリ dilation の場合と本質的に同様に示される.

先ず, Hを含むヒルベルト空間 Kとその上の互いに可換なユニタリ作用素の族$U_1, U_2, \cdots, U_n$が存在して

$$T_1^{m_1} T_2^{m_2} \cdots T_n^{m_n} = \rho P U_1^{m_1} U_2^{m_2} \cdots U_n^{m_n} | H \ (m_1, m_2, \cdots, m_n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つとする. このとき $\mathbf{T}^n$上の複素係数の, $z_1, \bar{z_1}, z_2, \bar{z_2}, \cdots, z_n, \bar{z_n}$を変数とする多項式 $p = p(z_1, \bar{z_1}, z_2, \bar{z_2}, \cdots, z_n, \bar{z_n})$ に

$$\rho^{-1}(p(U_1, U_1^*, U_2, U_2^*, \cdots, U_n, U_n^*) + (\rho - 1)p(0, 0, \cdots, 0)I)$$

$$= \rho^{-1}p(U_1, U_1^*, U_2, U_2^*, \cdots, U_n, U_n^*) + (1 - \rho^{-1})p(0, 0, \cdots, 0)I$$

を対応させる写像ψ(well-defined である) は完全縮小写像であることがわかる. したがって

$$\rho^{-1}\phi = P\psi(\ \ )|H$$

も完全縮小写像である (なおこのときϕの cb ノルム $||\phi||_{\mathrm{cb}}$はρと一致している).

次に$\rho^{-1}\phi$が完全縮小写像であるとする. Arveson の拡張定理 [3] によりそれは$C(\mathbf{T}^n)$ の完全正値写像に拡大できる. Stinespring の表現定理 [9] から Hilbert 空間 Kと, $C(\mathbf{T}^n)$ の*表現πが存在して

$$\rho^{-1}\phi = P\pi(\ \ )|H$$

が成り立つ. そこで

$$U_1 = \pi(z_1),\ U_2 = \pi(z_2),\ \cdots,\ U_n = \pi(z_n)$$

とおく. するとこれらの作用素は K 上の互いに可換なユニタリ作用素で定理の等式を満足することがわかる.

3. 同時ユニタリ dilation に関する安藤の 2 つの定理はたいへんよく知られている. その主張するところは, 互いに可換な縮小写像の組が同時ユニタリ dilation をもつこと [1], 縮小写像の 3 つ組で, そのどの 2 つも互いに可換であってそのどれか 1 つがほかの 2 つと複可換であるものが同時ユニタリ dilation をもつこと [2], である. ただし 2 つの作用素 S, T が複可換であるとは

$$ST = TS, \quad S^*T = TS^*$$

が成り立つことを意味する.

安藤の 2 番目の定理は次のとおりに拡張された. すなわち, 同時ユニタリ dilation をもつ 2 つの互いに可換な縮小写像の族の, 一方のそれぞれの作用素が他方のどの作用素とも複可換であれば, 2 つの族を併せた族は同時ユニタリ dilation をもつ [7]; cf.[6].

これを更にユニタリ ρ-dilation に拡張しよう.

定理 2. ヒルベルト空間 H 上の 2 つの互いに可換な作用素の族 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ と $T_1, T_2, \cdots, T_n$ がそれぞれ同時ユニタリ ρ-dilation, 同時ユニタリ σ-dilation をもつとする. このときもしも $S_1, S_2, \cdots, S_m$ それぞれがどの $T_1, T_2, \cdots, T_n$ とも複可換であれば 2 つの族を併せた族 $S_1, S_2, \cdots, S_m, T_1, T_2, \cdots, T_n$ は同時ユニタリ $\rho\sigma$-dilation をもつ.

$T_1, T_2, \cdots, T_n$ が生成する von Neumann 環を $\mathcal{A}$ とする.

$T_1, T_2, \cdots, T_n$ は極小同時ユニタリ σ-dilation $U_1, U_2, \cdots, U_n$ をもつ. それが作用するヒルベルト空間を K とし, H の K への埋蔵写像を V とする. $U_1, U_2, \cdots, U_n$ が生成する von Neumann 環を $\mathcal{B}$ とする. このとき $[V^*\mathcal{B}V] = K$ が成り立っている. また $V^*\mathcal{B}V$ の交換子 $(V^*\mathcal{B}V)'$ は $\mathcal{A}$ の交換子 $\mathcal{A}'$ を含む. したがって $S_1, S_2, \cdots, S_m$ を含む.

$q = q(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in P(\mathbf{T}^n)$ に

$$q(T_1, T_2, \cdots, T_n) + (1-\sigma)q(0, 0, \cdots, 0)I$$

を対応させる写像をϕ_2とおくとき, $\rho^{-1}\phi_2$ は unital な (1 を Iに写す) 完全縮小写像である. したがって再び Arveson の拡張定理によりそれは$C(\mathbf{T}^n)$ の完全正値写像に拡大できる. Stinespring の表現定理によってそれから得られるヒルベルト空間を極小化したものが Kであり, $C(\mathbf{T}^n)$ の *-表現を極小化したものπによる座標関数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$の像が U_1, U_2, $\cdots$, U_n である (とみなせる).

Arveson の定理 [3, Th.1.3.1] により, 任意の $S \in (V^*\mathcal{B}V)'$に対して $\tilde{S}V = VS$を満たす$\tilde{S} \in \mathcal{B}'$が定まり, 写像 $(\ )^{\tilde{}}$ は, (σ弱位相に関して連続な) *-準同型になる. 一方 $p = p(w_1, w_2, \cdots, w_m) \in P(\mathbf{T}^m)$ に

$$p(S_1, S_2, \cdots, S_m) + (1-\rho)p(0, 0, \cdots, 0)I$$

を対応させる写像をϕ_1とおくとき$\rho^{-1}\phi_1$は完全縮小写像である. よって $\psi = \rho^{-1}(\phi_1(\ ))^{\tilde{}}$ もまた完全縮小写像である. ここで$C(\mathbf{T}^{m+n})$ と$C(\mathbf{T}^m) \otimes C(\mathbf{T}^m)$ を同一視する. すると$\psi \otimes \pi$は $P(\mathbf{T}^{m+n})$ から $B(K) \otimes B(K)$ への写像とみなせる. それは完全縮小写像になる.

ここで “大なた”を振るう. $\mathcal{B}$は可換であるから単射的である. よって半離散的である [4], [5]. つまり, 代数的なテンソル積$\mathcal{B}' \odot \mathcal{B}$から $B(K)$ への自然な *-準同型

$$\sum_k X_k \otimes Y_k \longrightarrow \sum_k X_k Y_k$$

がC^*環$\mathcal{B}' \otimes \mathcal{B}$の *-準同型$\kappa$に拡大できる. $\psi \otimes \pi$とκの合成$\kappa \circ (\psi \otimes \pi)$ はまた完全縮小写像になる. ところで 任意の$r = r(w_1, w_2, \cdots, w_m, z_1, z_2, \cdots, z_n) \in P(\mathbf{T}^{m+n})$ に対して

$$\begin{aligned}(\rho\sigma)^{-1}(r(S_1, S_2, \cdots, S_m, T_1, T_2, \cdots, T_n)& \\ + (1-\rho\sigma)r(0, 0, \cdots, 0, 0, 0, \cdots, 0)I& \\ &= P(\kappa \circ (\psi \otimes \pi))(r)|H\end{aligned}$$

であることがわかる. よってrにこれを対応させる写像は完全縮小写像である. したがって S_1, S_2, $\cdots$, S_m, T_1, T_2, $\cdots$, T_n は同時ユニタリ$\rho\sigma$-dilation をもつことがわかる.

なお, 最近, 定理 2 は上の “おおなた”に頼らなくても証明出来ることがわかった.

参考文献

[1] T. Andô, On a pair of commuting contractions, *Acta Sci. Math.* 24(1963), 88-90.

[2] T. Andô, Unitary dilation for a triple of commuting contractions, *Bull. Acad. Polonaise Math.* 24(1976), 851-853.

[3] W. B. Arveson, Subalgebras of C^* algebras, *Acta Math.* 123(1969), 141-224.

[4] A. Connes, Classification of injective factors, *Ann. Math.* 104(1976), 585-609.

[5] E. G. Effros, E. C. Lance, Tensor products of operator algebras, *Adv. Math.* 25(1977), 1-34.

[6] T. Okayasu, The von Neumann inequality and dilation theorems for contractions, *Operator Theory: Adv. Appl.* 59(1992), 285-291.

[7] 岡安隆照, Simultaneous unitary dilation, 日本数学会年会, 1994/03/31.

[8] 岡安隆照, Commuting contractions の simultaneous unitary dilation, 数理解析研究所講究録 860(1994), 7-11.

[9] W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6(1955), 211-216.

[10] B. SZ.-Nazy, C. Foiaş, On certain class of power-bounded operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math.* 27(1966), 17-25.

[11] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, Harmonic analysis of operators on Holbert space, North-Holland, 1970.